205 - Espaces complets, exemples et applications.

I) Les espaces complets

1) Notion de complétude [Pom] + [Tiss]

Definition : suite de Cauchy, espace complet, Banach [Tiss 99]

Ex : espace métrique discret

Ex : R est complet *(ça dépend de la définition de R. Si on définit R par axiome de la borne supérieure, on prend une suite de Cauchy et on mq elle est bornée. On définit alors $a_n=\inf\{x_n, m>n\}$ qui existe parce que la suite est bornée. a_n est croissante et majorée donc cv vers un certain a. Il faut alors mq x_n cv vers a. On découpe $|x_n-a|$ en 3 et ça passe [Tiss18] ; sinon on peut définir R comme le complété de Q : C l'ensemble des suites de Cauchy de Q, C_0 celles qui convergent vers 0. C_0 est un idéal de C, donc on a une relation d'équivalence sur C définie par $(x_n)\sim(y_n)$ ssi (x_n-y_n) tend vers 0. R est défini comme étant C/C_0 [LFA p.5 et 16])*

Ex : Q n'est pas complet. Ex : la suite des décimales de sqrt(2) converge dans R mais pas dans Q car sqrt(2) est irrationnel [Tiss 18]

Prop : une suite de Cauchy est bornée ; une suite de Cauchy qui a une v.a converge [Tiss 100]

Prop : E, E' deux espaces métriques. f une bij bi-UC de l'un sur l'autre. Alors E complet ssi E' complet [Tiss 100] *(on mq si f est UC, l'image d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy. Ensuite on exploite plus que la continuité de f)*

Déf : deux distances sont topologiquement équivalentes si l'injection de l'un dans l'autre est continue, uniformément équivalentes si l'injection est UC, équivalentes si l'injection est lipschitzienne.

Rq : clairement, équiv => unif équiv => top équiv

Prop : par ce qui précède, si d et d' sont unif équiv, (E,d) complet ssi (E,d') complet [Tiss 101]

C-ex : $d(x,y)=|x-y|$ et $d'(x,y)=|\mathrm{Arctan}(x)-\mathrm{Arctan}(y)|$. (R,d) est complet, mais (R,d') non. En effet, $u_n=n$ est de Cauchy pour d' sont deux distances top équiv (regarder les boules ouvertes de d') mais pas UC-équiv. (R,d) est complet. $u_n=n$ est de Cauchy pour d' mais pas pour d. Or cette suite diverge (si u_n convergeait pour d', elle cvergerait pour d ce qui n'est pas).

Bilan : la complétude est une notion métrique et non topologique.

Csq : comme toutes les normes sont équivalentes sur un evn de DF, un evn de DF est complet pour une norme ssi il est complet pour n'importe laquelle [Tiss 101]

2) Propriétés des espaces complets

Prop : E est complet ssi l'intersection de toute suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 est un singleton [Tiss 102]

Prop : complet => fermé [Tiss 102] *(soit x un point de l'adhérence de A, x est limite d'une suite de pts de A qui cv donc qui est de Cauchy donc qui cv dans A donc x est dans A)*

Prop : fermé dans complet => complet [Tiss 102]

Prop : produit d'espaces complets [Tiss 103] *(pour quelle distance ? On peut définir 3 distances sur le produit, et mq elles sont équivalentes, donc on s'en fout. Le produit dénombrable d'espaces complets est complet [ZQ 147])*

Csq : R^n et C^n sont complets *(pas besoin de préciser la norme, car toutes les normes sont équivalentes en DF. On peut généraliser aux espaces métriques en prenant garde au fait que toutes les distances ne sont pas équivalentes sur R^n)*

Th : précompact + complet = compact [Tiss 105] *(utilise le fait que l'intersection d'une suite décroissante de fermés non vides est non vide. On montre que la suite a une v.a donc converge)*

Appl : les fermés bornés de R^n sont compacts [Tiss 108] *(A une partie fermée bornée. On mq A précompacte, et fermée dans R^n donc bornée)*

3) Exemples d'espaces complets

B(X,M), X ensemble, M complet, norme inf [Pom 45]

Cor : C(X,M) complet, X compact

L_c(E,F), F complet, norme sup [Pom 46]

Les L^p sont complets [Br 57] *(f_n une suite de Cauchy, il suffit de mq f_n a une sous suite qui cv. Comme f_n est de cauchy, on extrait une sous suite f_n_k tq l'écrat entre deux termes ocnsécutifs est plus petit que 1/2^k. On pose gn(x) la somme partielle des |f{k+1}-f_k|. La norme p de g_n est plus petite que 1. Par TCM, g_n cv vers une limite g. On mq |fm(x)-f_n(x)|<g(x)-g_{n-1}(x) donc suite de Cauchy dans C dc cv vers f(x). On mq f est dans L^p, on finit par le TCD)*

Voir Madère p.34

II) Utilisations de la notion de complétude

1) Prolongement de fonction et complétion d'un espace métrique

Prop : (critère de Cauchy pour les fonctions) E esp métrique, F complet. f une appl définie sur un sous ens D de E. Soit A une partie de D et a dans l'adhérence de A. f admet une limite en a quand x tend vers a en restant dans A ssi une sorte de critère de Cauchy [Gou 21] [Pom 48]

Appl : prolongement continu d'une fonction dérivable à dérivée bornée sur]a,b[[Pom 48] *(dérivée bornée donc LIP donc vérifie critère de Cauchy donc existence de limite et on conclut par prolongement continu)*

Th : (E,d) et (F,d') deux espaces métriques. A une partie dense de E.
- Si on a f continue de A dans F si pour tout x de E\A la limite de f(y) quand y tend vers en restant dans A existe, alors il existe un unique prolongement continu de f.
- Si f est UC sur A, F complet, alors il existe un unique prolongement UC de f [Gou 23] *(1er cas : on définit g comme valant f sur A, et valant la limite de f(y) pour y tend vers x si x est aps dans A. Reste à mq g est continue et unique. Cas 2 : se ramener au cas précédent, on mq la limite existe (grâce à l'UC, la complétude et le critère de Cauchy). On a donc un prolongement continu. On montre l'UC du prolongement grâce à l'UC de f. On montre l'unicité grâce au cas précédent)*

Th : (E,d) un espace métrique. A isométrie près, il existe une unique injection i de E dans Ê complet avec i(E) dense dans Ê [Gou 25] (attention : utilise le fait que R est complet, + prolongement !)
((E,d) un espace métrique
CONSTRUIRE Ê : C l'ensemble des suites de Cauchy de E. On montre que si U et V sont des éléments de C, (d(un,vn)) cv vers une limite notée D(U,V) (on utilise que R est complet). On mq D est une semi distance sur C. On mq U=V si D(U,V)=0 est une relation d'équivalence et on note Ê l'espace C quotienté par cette relation.
MQ D EST UNE DISTANCE SUR Ê : si U est une suite convergente de E qui cv vers a, alors sa classe dans Ê est l'ensemble des suites qui cv vers a. On mq que D(U,V) est indtp du choix des représentants et non note donc D(U^,V^), on mq D est une distance sur Ê.
MONTRER L'INJECTION ET LA DENSITÉ : à tout élément a de E, on associe la classe de la suite cste égale à a. On montre que c'est une isométrie donc une injection. reste à montrer la densité. U^ une classe dans Ê, U=(un), on mq U^ est limite de i(un).
Ê EST COMPLET : on regarde une suite de Cauchy de Ê, pénible.
LE COMPLÉTÉ EST UNIQUE A ISOMETRIE PRES : utilise le th de prolongement, 2e cas)

Ex : $L^p(R^n)$ est le complété de $(Cc(R^n),|.|p)$ [Rud 84] *(pour p=1 et n=1, sert notamment pour prolonger l'intégrale de Riemann)*

2) Convergence de séries

Def : convergence normale

Th : E complet ssi toute série normalement convergente est convergente.
Ex : série des $(-1)^n/n^2$

C-ex : c_{oo} l'ensemble des suites nulles apcr. c_{oo} n'est pas complet pour norme sup. $u_n=e_n/2^n$. La série des $|u_n|$ converge vers 2. La série des u_n ne converge pas dans c_{oo}.

3) Points fixes

Th : point fixe de Banach-Picard [Gou 21]

Appl : TIL [Gou 231]

Appl : Cauchy Lip [Pom 302] *(attention : toutes les versions de CL n'utilisent pas un th de point fixe)*

III) Théorèmes de Baire et conséquences

1) Théorème de Baire

Déf : espace de Baire : toute intersection dnb d'ouverts denses est dense [Gou 397] *(être de Baire est une ppté topologique)*

Th : th de Baire : complet => Baire [Gou 397] *(on se donne une suite d'ouverts denses on et un vois , il faut mq l'intersection de V avec l'intersection des On est non vide. On construit une première boule B_0 inclus dans Oo et V, puis on construit des boules Bn incluses les unes dans les autres de plus en plus petites qui sont incluses dans Bn-1 et On. Bn est une suite de fermés décroissants. Comme E est complet, leur intersection est non vide ; en effet, le diamètre des boules tend vers 0, et si on prend x_n dans B_n, la suite est de Cauchy donc converge, et appartient à l'intersection. C'est fini.)*

Ex : Q n'est pas de Baire *(considérer les ouverts Q\{q})* donc non complet.

Ex :]-1,1[est de Baire car homéomorphe à R complet, mais pas complet.

Appl : un evn à base dénombrable n'est pas complet [Gou 399] *(rapide : regarder les fermés $Fn=Vect(e_1,…,e_n)$)*

Appl : E complet, connexe, localement connexe => E n'est pas partitionnable en fermés disjoints [GT]

Appl : une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense [Gou 399] *(plus dur)*

Appl : les fonctions continues nulle part dérivables sont denses [Gou 401] *(plus dur)*

2) Conséquences dans les espaces de Banach

Th : (Banach Steinhaus) E Banach, F evn, H une famille de function linéaires continues. Si sup||u(x)]|| est fini pour tout x, alors sup||u|| est aussi fini [Tiss 276] *(consequence du th de Baire)*

Appl : une suite d'appl linéaires continues qui converge simplement converge vers une fonction linéaire continue et la cv est uniforme sur tout compact [Tiss 277] (on montre facilement que la limite est linéaire

Th : (application ouverte) si E et F sont deux Banach et que v est une AL continue de E dans F, alors :

- si v est surj alors v est ouverte

- si v est bij alors v est un homéo [Tiss 284] *(GROS théorème. Le 2e point est un corollaire du 1er. Il suffit de montrer que v(B(0,1)) contient une boule ouverte de F. Dépend pas de BS mais utilise Baire)*

Th : E et F deux Banach, u AL de E dans F. u est continue ssi son graohe est fermés dans ExF [Tiss 287] *(un sens facile, l'autre utilise l'application ouverte : le graphe G est complet, on regarde l'appl (x,u(x))->x qui est linéaire, bij et continue donc bicontinue)*

Reformulation : E, F deux Banach, u AL de E dans F. Si pour toute suite x_n de E tq x_n->x et u(x_n)->y on a T(x)=y alors u est continue.

Appl : un sous espace fermé de L^p est de DF [Rud anaf 111] *(utilise graphe fermé)*

IV) Espaces de Hilbert

Déf : Hilbert

Ex : esp préhilbertien de DF ; l² ; L²

1) Projection et dualité

Th, caract angulaire. Dessin pour expliquer la caractérisation angulaire. [BMP 95]

Ex : espérance conditionnelle [BMP 100]

Th : Riesz (application du théorème de projection) [BMP 103]

2) Bases hilbertiennes

Def base hilbertienne. Ne pas confondre avec base algébrique. [BMP 107]

Prop : Gram Schmidt [BMP 108] *(utilise la projection sur un convexe fermé)*

Ex : base de l²

Th : existence de base hilbertienne. La base est dénombrable ssi H est séparable. Dans le cas général on utilise Zorn. [BMP 108]

Rq : on sait aussi que tout ev (même de dim infini) à une base algébrique. Les notions de base alg et hilb coexistent donc mais sont bien différentes. Voir paragraphe [BMP 108]

Ex : Les L^p sont séparables (p fini), R^n, C^n, l^2…

Th : équivalences sur les bases hilbertiennes [BMP 109]

3) Espace L²

a) Séries de Fourier

Th : les e_n forment une base hilbertienne de L^2(T) *(csq de Fejer)*

Appl : si f est dans L^2, Sn(f) converge vers f dans L^2

b) Polynômes orthogonaux

Définition des espaces L²(I,ro) [BMP 110]

Rq : L²(I,ro) est complet

Def : suite de polynômes orthogonaux [BMP 110]

Prop : il existe une unique suite de polynômes orthogonaux [Dem 51]

Th : sous certaines conditions sur la fonction de poids, les polynômes orth forment une base hilb de L^2(I,ro) [BMP 140] (utilise les fonctions holomorphes).

Cor : si I est borné, le th s'applique.

Th : on en déduit une base o.n de L^2(R) gâce aux polynômes de Hermite [BMP 112]

4) Espace de Bergman [B & M]

Définition

Prop : $A^2(U)$ est un Hilbert

Prop : base hilbertienne de $A^2(D)$ (savoir qu'on peut alors trouver une base hilb de $A^2(U)$ grâce au théorème de représentation conforme de Riemann)

Développements :
1 - Sous espaces fermés de L^p [Rud Analyse fct 111] (**)
2 - Polynômes orthogonaux (base hilbertienne + appl à L^2) [Dem] + [BMP] (**)
3 - Espace de Bergman [Bayen & Margaria – Espaces de Hilbert et opérateurs] (**)

Bibliographie :
[BMP]
[Pom] Pommellet
[Rud anaf] Rudin – Functional analysis
[Rud] Rudin – Analyse réelle et complexe
[Gou]
[Mad] Madère – Leçons d'analyse
[Tiss] Tisseron
[B&M] Bayen & Margaria
[Dem] Demailly

Rapport du jury : par exemple, beaucoup ont du mal à voir que l'espace des fonctions continues de [0,1] dans R n'est pas complet si on le munit de la norme de la convergence en moyenne et ne savent pas à quoi ressemble son complété. Le théorème d'interversion des limites est rarement cité.
Le théorème de Baire trouvera évidemment sa place.

Fil maths-net : http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?4,569338